混合形近似式の最良化と関数値の計算(並列数値計算アルゴリズムとその周辺)

浜田, 穂積

数理解析研究所講究録
585巻 1986年 26-41

混合形近似式の最良化と関数値の計算

日立・中研　　浜田　穂積（HAMADA，Hozumi）

1．はじめに

プログラミング言語で定義され、あるいは用意される数学的関数などの計算法のうち１変数の関数については、計算能率の点から最良近似式が用いられることが多い。最良近似式の形の中で、多項式のものは Chebyshev 多項式の一次結合に展開したものを打ち切って、巾級数に戻したものに近いことから、直感的に理解し易い。しかし、多項式の形では精度の高い最良近似式が得にくい関数(例えば正接関数)の場合、有理式の形の最良近似式を作ると効果的であることが多い。[3,4,7]しかしながら、この場合には連分数の形の最良近似式が大抵同じ結果を与えるし、有理式の場合、係数の性質に若干難点があること[1]、得られた近似式を用いて計算機によって近似値を求めるにあたって若干精度について不利であるという実務的欠点が見出せる。このような理由で、むしろ自然な性質を多く持つ連分数を研究してみると、多項式と連分数とはある意味においてかなり似通った性質を持つこと[2]がわかる。そこで、これらを自然に組み合わせて、かなり多岐にわたる近似式の形を構成できる。混合形の式は多項式や有理式と比べて複雑に組み合わされているから、最良化は困難と思われるかもしれないが、連分数の最良化の計算方法を慎重に修正することで、ほとんど同じ程度の複雑さで可能である。

2．混合形近似式

最良近似式を構成し得るのは、現在のところ１変数の実関数に限られている。しかも近似式の定義域を固定しなければ最良近似式が定まらないことも知られている。この定義域を近似範囲と呼ぶことにする。定義域内における最大誤差は、同じ関数であっても、近似

範囲が広ければ大となり、複雑な式より簡単な式の方が大となることも容易に納得できる。

近似式の複雑さの尺度として、自由に定めることのできる定数の個数がある。これを自由度と呼ぶ。例えば多項式の場合

$$g(x)=c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1} \tag{1}$$

の形をしていれば、自由に定めることのできる定数は、$c_1, c_2, \cdots, c_n$ のｎ個と考える。この場合の自由度はｎである。(１)式の計算方法は各項を計算して和を取るのでなく、いわゆるHorner 法と呼ばれる次の漸化式による。

$$z_n=c_n \tag{2}$$

$$z_{i-1}=x\cdot z_i+c_{i-1} \tag{3}$$

$$i=n,\cdots,2$$

$$g(x)=z_1 \tag{4}$$

これによると、加(減)算ｎ－１回、乗算ｎ－１回で計算できる。この計算法は必ずしも演算回数最少でない[6]ことも知られているが、近似式を適用する場合はほとんどいつでも

$$|x\cdot z_i|<|c_{i-1}| \tag{5}$$

という関係が成り立ち、(３)式の計算において誤差の拡大が起こりにくい安定な計算法である[7]ため用いられている。

連分数（厳密には連分数の打ち切りというべきかも知れないが、誤解のない限り単に連分数という）は次の形のものが近似式として具合がよい。

$$g(x)=\frac{1|}{|c_1}+\frac{x|}{|c_2}+\cdots+\frac{x|}{|c_n} \tag{6}$$

この場合の計算法を上と同様にして示せば、

$$z_n=c_n \tag{7}$$

$$z_{i-1}=x/z_i+c_{i-1} \tag{8}$$

$$i=n,\cdots,2$$

$$g(x)=1/z_1 \tag{9}$$

となる。また、(５)式に対応する次式も同様である。

$$|x/z_i|<|c_{i-1}| \tag{10}$$

この場合の演算回数は、加(減)算ｎ－１回、除算ｎ回である。

ちなみに有理式の場合の演算回数を述べる。有理式とは２つの多項式の比で計算される式である。分子、分母の次数をそれぞれｋ，ｌとするとき、加(減)算、乗算ともにｋ＋ｌ回、除算１回である。この場合の自由度ｎは、分子、分母に０でない同じ定数を乗じても式の値は変らないから、ｋ＋ｌ＋１である。演算回数はｎを用いれば、加(減)算ｎ－１回、乗算ｎ－１回、除算１回となる（厳密には修正を要するが、第３章で述べる)。

多項式と連分数を一括して扱うため、次に述べる左から作用する演算子Ｐ，Ｃを定義する。

$$P_c^x z = c + x \cdot z \tag{11}$$

$$C_c^x z = 1/(c + x \cdot z) \tag{12}$$

演算子Ｐ，Ｃを用いれば、多項式と連分数は次のように表すことができる。

$$g(x) = P_{c_1}^x P_{c_2}^x \cdots P_{c_n}^x 0 \tag{13}$$

$$g(x) = C_{c_1}^x C_{c_2}^x \cdots C_{c_n}^x 0 \tag{14}$$

(７)～(９)と(14)は、厳密には同じ演算と言えないが、(12)の逆数と次の積の演算を組み合わせて１回の除算にすると考えれば同じ演算になる。(13)と(14)を対比して見るとき、ｎ個の演算子の列のそれぞれについてＰあるいはＣの何れかを、前後の演算子には無関係に定め得ることがわかる。演算子の列はすなわち式の形を示すから、この方法により自由度ｎの式は2^n通りの形の式を構成することができる。もちろんこれは一般論としての可能性であって、どの関数についても必ずできるというわけではない。(11)は多項式の、(12)は連分数の１段の演算要素に相当するから、ここで述べた演算子ＰとＣを混合する近似式を<u>混合形近似式</u>と称することにする。演算子ＰとＣは近似式に用いるだけでなく、無限展開式にも用いることができる。例えば

$$f(x) = P_{c_1}^x P_{c_2}^x \cdots P_{c_i}^x \cdots \tag{15}$$

は Taylor 展開形を表し、

$$f(x) = C_{c_1}^x C_{c_2}^x \cdots C_{c_i}^x \cdots \tag{16}$$

は無限連分数展開形を表わす。また演算子ＰとＣを任意に組み合わせた無限演算子列も存在し得る(収束するか否かは別として)。

以上述べたのは、近似式が一般の場合であるが、特別の条件がつく次の様な場合にも適用可能である。例えば$g(x)$が$O(x^m)$ $(m \neq 0)$のときは、

$$g(x) = x^m g_1(x) \tag{17}$$

として$g_1(x)$について本論の結果を適用し、最終的結果にx^mを掛ける。また、偶関数については(1)，(6)のxをx^2で置きかえる。奇関数については通常

$$g(x) = x P_c^{x^2} P_c^{x^2} \cdots P_c^{x^2} 0 \tag{18}$$

などとなるが、これを

$$g(x) = x P_c^{x} x P_c^{x} \cdots x P_c^{x} 0 \tag{19}$$

と表すこともでき、これから

$$x P_c^{x}, \quad x C_c^{x} \tag{20}$$

を演算子と考えることもできる。以後これら特別の場合についてはいちいち述べないことにする。

3．有理近似式の問題点

有理式形近似式には、次に述べるいくつかの実務的観点での問題点が有ることが分かってきた。

(Ⅰ) 多項式形近似式の基礎となるTaylor 展開の場合も、連分数展開の場合も、項数を少なくするときは、単に右側を必要なだけ切り捨てるだけで係数は変化しないが、有理形近似式の基礎となるPadé 展開の場合は、分子あるいは分母の項を右側でいくつか切り捨てると、ほとんど総ての係数が変化する。このことはPadé 展開が近似式の正準表現として相応しくないと考えられないだろうか。

(Ⅱ) 有理式の最良化は、連分数のそれより困難である。

(Ⅲ) 同じ自由度の多項式などと比べて、乗算回数が１回多くなる。分子あるいは分母のいずれかの最高次の係数を１とすれば、乗算回数は多項式並になるが、通常最も有効桁数の短くてよい係数で正規化することは不合理である。また次に述べる問題も生じる。

(Ⅳ) 最後の除算の２つの被演算数を考えるとき、分子、分母ともに近似値であるため、および特に１６進計算機のような場合、それらが誤差の大きい範囲にあると、結果の誤差

が大になる。この様なとき、可能な限り誤差を抑えるための各種の方策を使えないことが多い。

一方、次の様な良い点もある。

(Ⅴ) 多くの計算機で比較的時間のかかる除算命令が、たかだか１回必要なだけである。

(Ⅵ) 算術演算装置を複数個持ち、並列に使用可能なスーパーコンピュータなどでは、分子と分母を同時に計算して、全体としての計算時間を半分近くにすることができる[5]と言われている。

４．混合形近似式の整理

混合形の式は多項式と連分数の演算要素を組み合わせたものであるから、多項式と連分数を含むことは明らかである。ここではまず、一般の有理式が混合形の式に、自由度を変えないで変形可能であることを示すが、その前に、一般の有理式を演算子ＰあるいはＣで変形するとどうなるかを調べておく。有理式$R(x)$について、その分子、分母の次数をそれぞれ $N[R(x)]$, $D[R(x)]$ とする。

(Ⅰ)演算子Ｐについて

$$R_{i-1}(x)=P_{c_i}^{*}R_i(x) \tag{21}$$

となるように c_i, $R_i(x)$を定める。すなわち

$$c_i=R_{i-1}(0) \tag{22}$$

$$R_i(x)=\{R_{i-1}(x)-c_i\}/x \tag{23}$$

とする。このとき

$$N[R_i(x)]=\max(N[R_{i-1}(x)],D[R_{i-1}(x)])-1 \tag{24}$$

$$D[R_i(x)]=D[R_{i-1}(x)] \tag{25}$$

である。

(Ⅱ)演算子Ｃについて

$$R_{i-1}(x)=C_{c_i}^{*}R_i(x) \tag{26}$$

となるようにc_i, $R_i(x)$を定める。すなわち

$$c_i=1/R_{i-1}(0) \tag{27}$$

$$R_i(x)=\{1/R_{i-1}(x)-c_i\}/x \tag{28}$$

とする。ただし$R_{i-1}(0)\neq 0$ のときに限る。このとき

$$N[R_i(x)]=\max(N[R_{i-1}(x)],D[R_{i-1}(x)])-1 \tag{29}$$

$$D[R_i(x)]=N[R_{i-1}(x)] \tag{30}$$

である。

これらの事実を用いると、

・$N[R_{i-1}(x)]\geqq D[R_{i-1}(x)]$ のとき (21)

・$N[R_{i-1}(x)]\leqq D[R_{i-1}(x)]$ のとき (26)

によって変形すれば、次数に関する次の恒等的関係が成り立つ。

$$N[R_i(x)]+D[R_i(x)]=N[R_{i-1}(x)]+D[R_{i-1}(x)]-1 \tag{31}$$

ところで

$$N[R_0(x)]+D[R_0(x)]=n-1 \tag{32}$$

であるから、

$$N[R_{n-1}(x)]=D[R_{n-1}(x)]=0 \tag{33}$$

となる。これはR_{n-1} が定数であることを示している。

$$P_{c_n}^{*}0=c_n \tag{34}$$

$$C_{c_n}^{*}0=1/c_n \tag{35}$$

の何れも定数であるから、$R_{n-1}(x)$ として$P_{c_n}^{*}0$あるいは$C_{c_n}^{*}0$とすれば、自由度nの有理式は、0の左にn個の演算子PあるいはCの列を作用させたものとして表現できる。

一般の関数の場合も同様である。演算子Pを適用するばあいは

$$f_{i-1}(x)=P_{c_i}^{*}f_i(x) \tag{36}$$

となるように c_i, $f_i(x)$を定める。すなわち

$$c_i=f_{i-1}(0) \tag{37}$$

$$f_i(x)=\{f_{i-1}(x)-c_i\}/x \tag{38}$$

とする。また演算子Cを適用するばあいは

$$f_{i-1}(x)=C_{c_i}^{*}f_i(x) \tag{39}$$

となるように c_i, $f_i(x)$を定める。すなわち

$$c_i = 1/f_{i-1}(0) \tag{40}$$

$$f_i(x) = \{1/f_{i-1}(x) - c_i\}/x \tag{41}$$

とする。ただし$f_{i-1}(0) \neq 0$のときに限る。

自由度nの近似式は見掛け上2^n通りの形となり、それはそれで意味はあるが、１つの形の式を変形すると他の形になる数学的に等価な式がこれらの中に存在する。それらのうちの典型的な例は、同じく定数であっても(34)，(35)と２つの形を持つものである。また、有理式を混合形に変形する際、分子と分母の次数が等しいとき、(Ⅰ)，(Ⅱ)のどちらの操作をも適用し得ることに起因するものがある。両者の次数が等しいとき、(Ⅰ)，(Ⅱ)のいずれを先に適用するとしても、その次は(Ⅱ)を適用する。このとき $c_1 \neq 0$であれば

$$P_{c_1}^{*} C_{c_2}^{*} R(x) = C_{\beta_1}^{*} C_{\beta_2}^{*} \{\beta_3 R(x) + \beta_4\} \tag{42}$$

が成り立つ様に定数β_1～β_4を決定できる。逆に、(42)が成り立つための必要十分条件は次の通りである。

$$N[R(x)] \geqq D[R(x)] \tag{43}$$

さて、演算子Ｐ，Ｃの上下の添字と、右端の $P_{c_n}^{*}0$ あるいは $C_{c_n}^{*}0$ はいつでも再現できるし、式の形のみを問題にするときは、演算子のみの列で十分であるから、特に必要である場合をのぞいて、上下の添字と、右端の演算子以降の記述を省いて、長さn－１の演算子の列として表すことにする。

数学的に等価な式の間の関係を明確にするために、次の操作をする。長さn－１の演算子の列を次の規則で区切る。

(Ⅲ)演算子列の右側に区切り線を入れる。

(Ⅳ)区切り線から左に見て最初に出会う演算子Ｃが、左端の演算子でないとき、その演算子Ｃの左の演算子の左側に区切り線を入れる。

この操作が一意的であることは明らかである。この操作で、両側を区切り線で囲まれた演算子列を本体ブロックといい、左側に区切り線のない演算子列を前置ブロックという。前置ブロックは、もしあればただ１個であり、次の形をしている。

$$PP^{m} \text{ あるいは } CP^{m} \quad (m \geqq 0) \tag{44}$$

また本体ブロックは、空であることもあるが、もしあれば次の形をしている。

$$PCP^m \text{ あるいは } CCP^m \ (m \geqq 0) \tag{45}$$

ここでP^mはm個のPの列を意味する。

このとき、異なる演算子の列に対応する式が、数学的に等価であるための必要十分条件は、次の通りである。

(i)演算子の長さが等しい。

(ii)区切り線が対応する同じ位置に入っている。

(iii)前置ブロックは、もしあれば全く同じものである。

(iv)1個以上の対応する本体ブロックにおいて、一方がPCP^{m}ならば、他方はCCP^{m}となっている。

十分条件であることは、(42)が示している。必要条件であることは、次の様にして示される。

(v)演算子の列の長さが異なるとき、等価といえない。

演算子の列の長さが等しいとき、その式を整理して有理式の形にしておく。このとき

(vi)前置ブロックが異なれば、それぞれの有理式の分子、分母の次数が異なるから、等価といえない。

したがって本体ブロックの部分のみ構造の異なる場合を考えればよいことになるが、このとき先にあげた有理式の変形規則に従わない演算子を適用すると、関係(31)が成り立たず、必ず演算子の列が元のものより長くなるため、ここでの考察の対象でなくなるからである。

数学的に等価な式は1度しか数えないとする場合の、自由度nの式の本質的な個数M_nは、次の様にして定めることができる。

(a)n＝1のとき、定数のみであるから、次の関係が成り立つ。

$$M_1 = 1 \tag{46}$$

(b)n＝2のとき、c_1+c_2xと$1/(c_1+c_2x)$の2通りなので、次の関係が成り立つ。

$$M_2 = 2 \tag{47}$$

(c)n≧3のとき、この場合は次の2通りの由来を持つ式が作られる。

(イ)自由度n－2の演算子の列をSとする。このときSPCとSCCを作る。この様にして作られる式の個数はM_{n-2}である。

(ロ)自由度ｎ－１の演算子の列をＴとする。このときＴＰを作る。この様にして作られる式の個数はM_{n-1} である。

(イ)と(ロ)によつて作られる式は、自由度ｎの式の総てを尽くし、かつ重複もない。したがって次の関係が成り立つ。

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} \tag{48}$$

以上により、M_n はいわゆる Ｆibonacci 数列となることがわかる。以上まとめて、多項式と連分数、有理式、混合形の異なる式の数を表１に示す。

５．混合形近似式の評価

混合形の式が多項式と連分数を含むことは前章で述べた。自由度３では、有理式の中に多項式とも連分数とも対応しない次の例のような式が有ることを表１は示している。

$$g(x) = 1/(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \tag{49}$$

これは演算子の列で述べれば、次の通りである。

自由度３の多項式は

ＰＰＰ

であり、これと等価な式に次のものがある。

ＰＰＣ

また自由度３の連分数は

ＣＣＣ

であり、これと等価な式に次のものがある。

ＣＣＰ

ＰＣＰ

ＰＣＣ

$2^3=8$ 通りの式のうち、残る２つの(等価な)式

ＣＰＰ

ＣＰＣ

のうち上のものが(49)である。

表１．近似式の個数

自由度	多・連	有理式	混合形
1	1	1	1
2	2	2	2
3	2	3	3
4	2	4	5
5	2	5	8
6	2	6	13
7	2	7	21
8	2	8	34
9	2	9	55
10	2	10	89

同様に、自由度４になると、混合形の式の中に有理式に含まれないものが有ることを示している。その一例は次の形の式である。

$$g(x)=c_1+x/(c_2+c_3x+c_4x^2) \tag{50}$$

この式の演算回数を復習してみよう。第２章によると、加算３回、乗算２回、除算１回である。この式の重要な点は次の通りである。すなわち、式(50)を整理して有理式にすることができるが、そうすると$g(x)$は分子、分母ともに２次の多項式となり、それぞれ加算２回、乗算２回、全体として加算４回、乗算４回(式を工夫すれば３回にできる)、除算１回となって自由度５の式に相当する演算回数である。この意味において式(50)は有理式に含まれないとここでは述べているのである。実際のところ、分子、分母ともに２次の多項式である有理式の形で最良化を行うと、必ず自由度５の近似式が得られるので(50)式の形の最良近似式は決して得られない。この様なことが起こるのは、演算子列の分割でできるPCP^mあるいはCCP^mの形の本体ブロックのうち$m>0$のものが有るときであることは簡単な考察で分かる。

それでは混合形最良近似式の存在意義はあるのであろうか。自由度nの2^n通りの総ての式について、次の章で述べる最良化の計算を行って、その中で最大誤差最小のものが、もし常に有理式の中にあれば混合形を導入する意義は実質的には無いことになる。しかし、幸いにも結果は肯定的であった。

例えば、$\sin x$の$|x|\leqq\pi/4$における、相対誤差に関する最良近似式は、自由度１，２，３では多項式が良く、４では有理

表２．$\sin x$の$|x|\leqq\pi/4$における最良近似式の各範疇での最小の最大相対誤差

自由度	多項式	有理式	混合形
1	5.246×10^{-2}	5.246×10^{-2}	5.246×10^{-2}
2	4.084×10^{-4}	4.084×10^{-4}	4.084×10^{-4}
3	1.507×10^{-6}	1.507×10^{-6}	1.507×10^{-6}
4	3.238×10^{-9}	2.323×10^{-9}	2.323×10^{-9}
5	4.550×10^{-12}	2.408×10^{-12}	1.120×10^{-12}
6	4.505×10^{-15}	1.888×10^{-15}	1.200×10^{-16}
7	3.312×10^{-18}	1.114×10^{-18}	3.739×10^{-19}
8	1.880×10^{-21}	4.355×10^{-22}	8.288×10^{-23}
9	8.482×10^{-25}	1.435×10^{-25}	2.046×10^{-26}
10	3.116×10^{-28}	4.019×10^{-29}	3.366×10^{-30}

式、５以上では混合形の式が最も良いことが分かった。中でも著しいのは自由度６の場合で、多項式では4.5×10^{-15}，有理式では1.9×10^{-15}，混合形では1.2×10^{-16}(ＰＰＰＣＰＰ)となり、有理式より１桁以上良い結果であった。ここで述べた場合の、自由度１～１０における各範疇での最小の最大相対誤差を表２に示す。これ以外の関数についても調べた結果、大まかに言って次の２通りの傾向であるらしいことが判明した。

(Ⅰ)従来多項式で十分と言われていた関数の場合、自由度が小さい内は多項式が良く、自由度が大になると１歩か２歩有理式の中に歩を留めて、その後は混合形の式が最良となる。

(Ⅱ)従来有理式が必要と言われていた関数の場合、自由度に関わらず連分数が最良となる。

６．混合形の最良近似式の計算法

混合形の最良近似式も容易に計算可能であるが、その方法の要点を述べる。

最良化計算法は、最良近似式であるための条件から作られる方程式から直接計算することは困難なので、次に述べるよく知られた[3,4,7]収束計算による。誤差の評価式を$E(x)$とする。次の２式を満たす$n+1$個の点xを偏差点という($x_0>x_1>\cdots>x_{n-1}>x_n$)。最良近似式では次の関係が成り立つ。

$$E(x_j)=(-1)^j\varepsilon \qquad (51)$$

$$j=0,1,2,\cdots,n$$

$$\left.\frac{dE(x)}{dx}\right|_{x=x_j}=0 \qquad (52)$$

$$j=1,2,\cdots,n-1$$

広い意味での最良近似式では、必ずしも(52)が成り立たないが、実用的な最良近似式では(52)が成り立つとして差し支えない。ここではむしろ、(52)が成り立つ場合に限定して計算法を示す。

(51)，(52)が成り立つように次の手順で解く。

(ｉ) c_i，x_jの初期値を適当に定める。

(ii) x_jを固定して、(51)を満たすようにc_iを定める。

(iii) c_iを固定して、(52)を満たすように x_j を定める。

(iv) $E(x_j)$のバラツキを調べ、収束したとみなせないとき(ii)へ戻る。

計算に先だって近似式の形を演算子の列として定める。すなわち左端の添字１から右端の添字ｎまで、添字のそれぞれについて演算子ＰあるいはＣを決定する。次に被近似関数 $f(x)$を先の近似式の演算子列と同じ列に展開して、係数 c_i と剰余関数 $fr(x)$ を、次の関係を満たす様に定める。ここで、このように展開できることと、$fr(x)$が連続であることが条件である。

$$f(x)=O_{c_1}^{*}O_{c_2}^{*}\cdots O_{c_n}^{*}fr(x) \tag{53}$$

ただしＯはＰあるいはＣを表すものとする。多くの場合 c_i は有理数となるので、きちんと有理数として計算しておくことが望ましい。そうすれば剰余関数 $fr(x)$ の誤差も小にできるからである。剰余関数 $fr(x)$ を計算することは面倒であるが、それなりに報いられる。なお以下の記述で、式の右に｛と｝で囲んだものを伴うとき、その添字に該当する演算子がＰであるかＣであるかに従って｛｝の左、あるいは中の式を用いることを意味するものとする。

まず被近似関数 $f(x)$の漸化式を次の通りとする。

$$y_n=fr(x) \tag{54}$$

$$y_{i-1}=x\,y_i+c_i \qquad \{y_{i-1}=1/(x\,y_i+c_i)\} \tag{55}$$

$$f(x)=y_0 \tag{56}$$

次に近似式 $g(x)$の漸化式を次の通りとする。

$$z_n=0 \tag{57}$$

$$z_{i-1}=x\,z_i+d_i+c_i \qquad \{z_{i-1}=1/(x\,z_i+d_i+c_i)\} \tag{58}$$

$$g(x)=z_0 \tag{59}$$

次の諸式は、記述の簡潔さの為である。

$$Y_i=x\,y_i+c_i \tag{60}$$

$$Z_i=x\,z_i+d_i+c_i \tag{61}$$

$$\eta_i=z_i-y_i \tag{62}$$

$$H_i=Z_i-Y_i=x\,\eta_i+d_i \tag{63}$$

$$e(x)=g(x)-f(x) \tag{64}$$

$$E(x)=e(x)/w(x) \tag{65}$$

$w(x)$は重率関数であるが、応用上ほとんどの場合絶対誤差、あるいは相対誤差に関する最良化が行われるので、この場合 $w(x)=1$ あるいは $w(x)=y_0$ となり、計算は幾分簡単になる。(60)～(65)を用いると、$f(x)$, $g(x)$の漸化式は次の様に表せる。

$$y_n=fr(x) \tag{66}$$

$$y_{i-1}=Y_i \qquad \{y_{i-1}=1/Y_i\} \tag{67}$$

$$f(x)=y_0 \tag{68}$$

$$z_n=0 \tag{69}$$

$$z_{i-1}=Z_i \qquad \{z_{i-1}=1/Z_i\} \tag{70}$$

$$g(x)=z_0 \tag{71}$$

またηについては次の関係が成り立つ。

$$\eta_n=-fr(x) \tag{72}$$

$$\eta_{i-1}=y_{i-1}H_i/Y_i \qquad \{\eta_{i-1}=-y_{i-1}H_i/Z_i\} \tag{73}$$

$$e(x)=\eta_0 \tag{74}$$

これまでの関係式において添字 i は $i=n,\cdots,2,1$ の順に適用され、以下においては $i=1,2,\cdots,n$ の順に適用される。最後に

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}u_id_i-U_n \tag{75}$$

におけるu_i, U_nは

$$U_0=f(x)/w(x)=y_0/w(x) \tag{76}$$

$$u_i=U_{i-1}/Y_i \qquad \{u_i=-U_{i-1}/Z_i\} \tag{77}$$

$$U_i=xy_iu_i \tag{78}$$

であり、d_iの修正に必要な $v_i=\partial E(x)/\partial d_i$ は次の式で計算できる。

$$V_0=g(x)/w(x)=z_0/w(x) \tag{79}$$

$$v_i=V_{i-1}/Z_i \qquad \{v_i=-V_{i-1}/Z_i\} \tag{80}$$

$$V_i=xz_iv_i \tag{81}$$

これらの式の間にもよい類似性があることがわかる。

手順(i)において、xを次式により座標変換してp(0≦p≦n)に変える。

$$x=r\cdot\cos(p\pi/n)+q \quad \{x=r\cdot\cos(p\pi/(2n+1))\} \tag{82}$$

ここで、近似式の定義域を $q-r\leqq x\leqq q+r$ とする({} 内は奇関数の場合)。このとき、一つの混合形展開のnについて1から順に計算するとき、j について小さい方の半分と、大きい方の半分に分けて考える。

小さい方の半分については

$$p_j=p_j(\text{n が1つ小のものの}) \tag{83}$$

大きい方の半分については

$$p_j=p_{j-1}(\text{n が1つ小のものの})+1 \tag{84}$$

とすれば、良い p の初期値が得られることが経験的に判っている。[2)] このようにpを定めると、誤差関数がChebyshev 多項式の一次変換したものに近いとき $p_j\sim j$ となる。

また、d_1の初期値は、$(p_j+p_{j+1})/2$ において(75)が0になるように定める(当然xとpの変換は行なう)。これは一種の修正Chebyshev 補間といえるものである。

手順(ii)は、(79)～(81)を用いて通常の方法で計算する。

手順(iii)では、x座標より、p座標の場合むしろ p_j の両側でE(x)が良い対称性を示すので、pに関して p_j を中心とする5点を用いる2段の中心差分により、Newton 法を1回適用することで、大抵の場合良い結果を得る。

手順(iv)においては、$|E(x_j)|$の最大のものと最小のものの相対的違いが、10^{-4}以下となれば収束したとみなす基準にするか、それとも10^{-10} とするかによって計算限界が異なる。計算限界は、直感的には目的とする最良近似式の最大誤差と、いわゆる machine epsilon との関係で定まると考えられ、それよりも十分余裕のある精度で計算すべきとされているが、それは正しくない。上記の計算方法は、最良化の計算において桁落ちを極力起こさないようにするもので、それは(64)で直接計算しないで、ηを用いる(73)によっているから、$E(x_j)$をいかに精度良く計算できるかという観点で考えるとき、(75)の計算がどのように行なわれるかにかかっている。ここで$E(x_j)$の計算経過を示す数値例をあげる。$\tan^{-1}x$の $|x|\leqq1$ における連分数型の、相対誤差基準の、自由度4の最良近似式での、

各偏差点における(75)の各項の値を、表３に最大誤差で正規化したもので示す。この例は自由度に比べて誤差の大きい場合であるが、誤差の小さい場合の例を、表４に示す。同じ自由度の場合で、sin x の$|x|\leqq 1/16$における多項式では次のようになる。

４次のずらし Chebyshev 多項式$-T_4(2x-1)$の結果を表５に示す。

これらのことから言えることは、E(x)の計算から発生する桁落ちはChebyshev 多項式の計算におけるのと同じ原因で、これは最大誤差そのものに関係するのでなく、自由度に関係するということである。先に述べた収束の基準を10^{-10}とするとき、経験上(１６進１４桁の)倍精度で自由度８位迄計算できる。収束の基準を10^{-4}にすれば、自由度１２～１４位迄計算できると考えられる。

いずれにせよ、混合形であっても最良化は容易である。

表３．E(x) の各項，$\tan^{-1}$ の場合

	u_1d_1	u_2d_2	u_3d_3	u_4d_4	$-U_4$
x_0	-0.79	23.63	-110.65	181.40	-94.60
x_1	-0.81	21.07	-84.66	115.65	-50.25
x_2	-0.89	13.71	-32.52	24.62	-5.93
x_3	-0.97	4.46	-3.10	0.65	-0.04
x_4	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表４．E(x) の各項，sin の場合

	u_1d_1	u_2d_2	u_3d_3	u_4d_4	$-U_4$
x_0	-1.00	32.02	-160.07	256.10	-128.05
x_1	-1.00	27.33	-116.61	159.26	-67.97
x_2	-1.00	16.00	-40.01	32.01	-8.00
x_3	-1.00	4.69	-3.43	0.80	-0.06
x_4	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表５．$-T_4(2x-1)$ の各項

	-1	$32x$	$-160x^2$	$256x^3$	$-128x^4$
x_0	-1.00	32.00	-160.00	256.00	-128.00
x_1	-1.00	27.31	-116.57	159.20	-67.94
x_2	-1.00	16.00	-40.00	32.00	-8.00
x_3	-1.00	4.69	-3.43	0.80	-0.06
x_4	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00

７．おわりに

近似式の形として、多項式と連分数の計算の１段の演算要素を抽出して、それらを自由に組み合わせることにより、従来行われていた有理式形近似式を含む混合形近似式を構成でき、これらの中には係数を自由に決定できる有理式とは対応しない形のものを含むこと

がわかった。この種の最良近似式は、有理式の形を定めて最良化する方法では見出せない。しかも関数によっては、同じ演算量の全ての混合形最良近似式の中で最小の最大誤差を持つ式が、有理式の外にある場合が発見された。このことは、従来最良の近似式として知られていたものも必ずしも最良でなく、より誤差の小の近似式を発見できる可能性が生じたことを意味している。混合形の近似式は、見掛け上２の自由度乗個であるが、これらの間に数学的には等価な式のグループがある。その等価であるための条件が明確になり、グループの個数が Ｆibonacci 数であることが分かった。

また混合形近似式の最良化は、式の形が複雑になったにもかかわらず、特別の困難はないことも示すことができた。

これらの結果、関数ルーチンの設計の自由度が増したといえよう。ただ誤差最小の近似式の形を決定するための指針は得られなかった。この点に関しては今後の課題としたい。

この論文の成立に適切な助言を戴いた、立教大学教授島内剛一博士に感謝する。また、活発な議論をして戴いた当社基礎研究所主任研究員二村良彦博士に感謝する。

参考文献

［１］ 浜田穂積：有理式近似および連分数近似の最良化について，情報処理,Vol.19,No.11, pp.1065-1071(Nov. 1978)

［２］ 浜田穂積：最良近似式計算システム，情報処理学会数値解析研究会資料６，(Oct. 1983)

［３］ Ｊ.Ｆ.Hart et al.:Ｃomputer Ａpproximation,Ｊohn Wiley and Ｓons(1968)

［４］ 一松信：初等関数の数値計算，教育出版(1974)

［５］ 唐木幸比古：スーパーコンピュータ Ｓ-８１０の応用性能，情報処理学会数値解析研究会資料１２，(Feb. 1985)

［６］ 野崎昭弘：計算機数学，共立出版(1984)p.54

［７］ 山内二郎，宇野利雄，一松信：電子計算機のための数値計算法Ⅲ，培風館(1962)